

ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 4 2015  
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.6

В. Б. МАЛЮТИН

**ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ,  
ОСНОВАННОЕ НА АППРОКСИМАЦИИ ХРОНОЛОГИЧЕСКИ  
УПОРЯДОЧЕННОЙ ЭКСПОНЕНТЫ**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: malyutin@im.bas-net.by*

Предложен метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра  $b$ , входящего в дифференциальное уравнение для переходной функции. Этот метод основывается на аппроксимации хронологически упорядоченной экспоненты обычными экспонентами.

*Ключевые слова:* функциональные интегралы, хронологически упорядоченная экспонента.

V. B. MALYUTIN

**EVALUATION OF MATRIX VALUED FUNCTIONAL INTEGRALS BASED ON THE APPROXIMATION  
OF A CHRONOLOGICALLY ORDERED EXPONENT**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: malyutin@im.bas-net.by*

The method for approximate evaluation of matrix valued functional integrals with a small parameter  $b$  in the differential equation for the transition function is proposed. This method is based on the approximation of a chronologically ordered exponent by usual exponents.

*Keywords:* functional integrals, chronologically ordered exponent.

**Введение.** Матричнозначные функциональные интегралы представляют собой один из видов функциональных интегралов. В матричнозначных интегралах интегрирование производится по обычным вещественным переменным, а переходные функции, определяющие меру, принимают матричные значения. Через матричнозначные функциональные интегралы выражаются фундаментальные решения систем дифференциальных уравнений [1, 2]. Матричнозначные интегралы возникают, например, при рассмотрении релятивистских частиц с целым и полуцелым спином [3, 4]. Использование матричнозначных интегралов для представления фундаментального решения задачи Коши для уравнения Дирака, описывающего движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, рассмотрено в работах [5, 6].

Следуя работам [5, 6], матричнозначный функциональный интеграл будем рассматривать на пространстве функций  $x(\tau)$ ,  $s \leq \tau \leq t$ , удовлетворяющих условию  $x(s) = 0$  и условию Липшица с порядком, равным единице, т. е. для любых  $s \leq a < b \leq t$ ,  $|x(b) - x(a)| \leq M |b - a|$ . Интеграл определяется равенством

$$\int F(x(\cdot)) d\mu(x) = \lim_{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0} \int_R(n) \int_R F \left( \sum_{j=1}^n x_j \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\cdot) \right) \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) dx_1 \dots dx_n, \quad (1)$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка  $[s, t]$  точками  $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ .

Здесь  $x_j = x(t_j)$ ,  $\chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau)$  – характеристическая функция интервала  $[t_{j-1}, t_j]$ ;  $S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1})$  – переходная функция, являющаяся фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} = a\alpha \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + b\beta S(t, x), \quad (2)$$

где  $a, b$  – вещественные параметры,  $\alpha, \beta$  – антикоммутирующие величины (операторы или матрицы), т. е.  $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$ .

Некоторые классы матричнозначных интегралов, которые могут быть вычислены точно, рассмотрены в работах [7, 8]. Один из методов вычисления матричнозначных функциональных интегралов – это аппроксимация матричнозначных интегралов скалярнозначными функциональными интегралами [9–11]. Широкое и детальное исследование методов вычисления скалярнозначных функциональных интегралов проведено в работах [12–14]. Еще один метод – это построение приближенных формул, точных для функциональных многочленов заданной степени [15]. Такие формулы называются формулами заданной степени точности и широко используются для приближенного вычисления скалярнозначных функциональных интегралов. В работах [16, 17] рассмотрен метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра  $a$  и больших значениях параметра  $b$ , который основан на аппроксимации интегрируемого функционала функциональными многочленами.

В данной работе предлагается метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра  $b$ , который основывается на аппроксимации хронологически упорядоченной экспоненты обычными экспонентами.

**1. Аппроксимация матричнозначного функционального интеграла.** Метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов рассмотрим для цилиндрических функционалов, т. е. функционалов вида

$$F\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau), \dots, \int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right). \quad (3)$$

**Теорема.** Пусть функции  $f_j(\tau)$ ,  $1 \leq j \leq d$ , интегрируемы в смысле Римана, пусть  $\int |\hat{F}(z_1, \dots, z_d)| \exp\left((t-s)|a| \cdot \|\alpha\| \sum_{l=1}^d \overline{f_l} |z_l|\right) dz_1 \dots dz_d \leq C$ , где  $\hat{F}$  обозначает обратное преобразование Фурье функции  $F$ ,  $\overline{f_l} = \max_{s \leq \tau \leq t} |f_l(\tau)|$ ,  $1 \leq l \leq d$ . Тогда для матричнозначного интеграла справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int F\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau), \dots, \int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right) d\mu(x) = \\ & = \sum_{k=0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} F\left(-a\alpha \int_s^t \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) f_1(\tau) d\tau, \dots, -a\alpha \int_s^t \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) f_d(\tau) d\tau\right) (b\beta)^k d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + \overline{R}_m, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \chi_{[\tau_{j+1}, \tau_j]}(\tau)$ ,  $\tau_0 = t$ ,  $\tau_{k+1} = s$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\overline{R}_m\| = 0$ .

**Доказательство.** Если функции  $f_j(\tau)$ ,  $1 \leq j \leq d$ , интегрируемы в смысле Римана, а функция  $x(\tau)$ ,  $s \leq \tau \leq t$ , удовлетворяет условию Липшица с порядком, равным единице, то интегралы  $\int_s^t f_j(\tau)dx(\tau)$ ,  $1 \leq j \leq d$ , существуют [18].

По определению матричнозначного интеграла имеем

$$I = \int F\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau), \dots, \int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right) d\mu(x) =$$

$$= \lim_j \int_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \int_R (n) \int_R F \left( \sum_{j=1}^n f_1(t_j)(x_j - x_{j-1}), \dots, \sum_{j=1}^n f_d(t_j)(x_j - x_{j-1}) \right) \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) dx_1 \dots dx_n.$$

Используя замену переменных  $x_j - x_{j-1} = y_j$  и то, что преобразование Фурье функции  $S(t_j - t_{j-1}, y_j)$  равно  $\exp((t_j - t_{j-1})(-ia\alpha z_j + b\beta))$ , получим

$$\begin{aligned} I &= \lim_j \int_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \int_R (n) \int_R F \left( \sum_{j=1}^n f_1(t_j)y_j, \dots, \sum_{j=1}^n f_d(t_j)y_j \right) \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, y_j) dy_1 \dots dy_n = \\ &= \lim_j \int_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \int_R (d) \int \hat{F}(z_1, \dots, z_d) \prod_{j=n}^1 \exp \left( (t_j - t_{j-1}) \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \right) dz_1 \dots dz_d. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\hat{F}$  обозначает обратное преобразование Фурье функции  $F$ .

Используя хронологически упорядоченную экспоненту [19–21], определяемую равенством

$$\bar{T} \exp \left( \int_s^t f(\alpha, \beta, \tau) d\tau \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^1 \exp \left( \int_{\frac{t-s}{n}(j-1)}^{\frac{t-s}{n}j} f(\alpha, \beta, \tau) d\tau \right),$$

мы можем записать

$$\prod_{j=n}^1 \exp \left( (t_j - t_{j-1}) \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \right)$$

в виде

$$\bar{T} \exp \left( \int_s^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right).$$

Рассмотрим равенство, позволяющее перейти от хронологически упорядоченной экспоненты к обычной экспоненте:

$$\begin{aligned} \bar{T} \exp \left( \int_s^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) &= \exp \left( \int_s^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) + \\ + \int_s^t \frac{d}{d\tau_1} \left[ \exp \left( \int_{\tau_1}^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \bar{T} \exp \left( \int_s^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \right] d\tau_1 &= \\ = \exp \left( \int_s^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) + \int_s^t \exp \left( \int_{\tau_1}^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \\ \times b\beta \bar{T} \exp \left( \int_s^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) d\tau_1. \end{aligned}$$

Применяя последовательно это равенство для хронологически упорядоченной экспоненты, получим

$$\begin{aligned} \bar{T} \exp \left( \int_s^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) &= \\ = \sum_{k=0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} \exp \left( \int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \\ \times b\beta \exp \left( \int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \dots \times \end{aligned}$$

$$\times b\beta \exp \left( \int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + R_m, \quad (6)$$

где  $\tau_0 = t$ ,  $\tau_{k+1} = s$ ,

$$\begin{aligned} R_m = & \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_m} \exp \left( \int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \\ & \times b\beta \exp \left( \int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \dots \times \\ & \times b\beta \bar{T} \exp \left( \int_{\tau_{m+2}}^{\tau_{m+1}} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) d\tau_{m+1} \dots d\tau_2 d\tau_1, \end{aligned}$$

где  $\tau_{m+2} = s$ .

Из (5), (6) получаем

$$\begin{aligned} I = & \lim_{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{k=0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} \int_R (d) \hat{F}(z_1, \dots, z_d) \exp \left( \int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \\ & \times b\beta \exp \left( \int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \dots \times \\ & \times b\beta \exp \left( \int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) dz_1 \dots dz_d d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + \bar{R}_m, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{R}_m = & \lim_{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0} \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_m} \int_R (d) \hat{F}(z_1, \dots, z_d) \exp \left( \int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \\ & \times b\beta \exp \left( \int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \dots \times \\ & \times b\beta \bar{T} \exp \left( \int_{\tau_{m+2}}^{\tau_{m+1}} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) dz_1 \dots dz_d d\tau_{m+1} \dots d\tau_2 d\tau_1. \end{aligned}$$

В (7), используя соотношения антикоммутации для  $\alpha$ ,  $\beta$ , расположим  $b\beta$  справа от экспонент, содержащих  $ia\alpha$ . Получим

$$\begin{aligned} I = & \lim_{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{k=0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} \int_R (d) \hat{F}(z_1, \dots, z_d) \times \\ & \times \exp \left( \int_s^t \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) (b\beta)^k dz_1 \dots dz_d d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + \bar{R}_m, \end{aligned}$$

где  $\xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \chi_{[\tau_{j+1}, \tau_j]}(\tau)$ ,  $\tau_0 = t$ ,  $\tau_{k+1} = s$ .

Под знаком предела  $\lim_{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0}$  интеграл  $\int_s^t \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau$  можно записать в виде  $\sum_{j=1}^n \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(t_j) \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) (t_j - t_{j-1})$ .

После вычисления интегралов по  $dz_1 \dots dz_d$  выражение для  $I$  примет вид

$$I = \lim_{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{k=0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} F \left( \sum_{j=1}^n \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(t_j)(-a\alpha)f_1(t_j)(t_j - t_{j-1}), \dots, \sum_{j=1}^n \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(t_j)(-a\alpha)f_d(t_j)(t_j - t_{j-1}) \right) \times \\ \times (b\beta)^k d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + \bar{R}_m.$$

Вычисляя предел, получаем следующее равенство для  $I$ :

$$I = \sum_{k=0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} F \left( -a\alpha \int_s^t \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) f_1(\tau) d\tau, \dots, -a\alpha \int_s^t \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) f_d(\tau) d\tau \right) (b\beta)^k d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + \bar{R}_m,$$

т. е. равенство (4) верно.

Норму остатка  $\bar{R}_m$  можно оценить величиной

$$\|\bar{R}_m\| \leq \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_m} \int_R (d) \int_R |\hat{F}(z_1, \dots, z_d)| \exp \left( (t-s) |a| \cdot \|\alpha\| \sum_{l=1}^d |\bar{f}_l| |z_l| \right) |b|^{m+1} \cdot \|\beta\|^{m+1} \times \\ \times \exp((t-s) |b| \cdot \|\beta\|) dz_1 \dots dz_d d\tau_{m+1} \dots d\tau_2 d\tau_1 \leq \\ \leq \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_m} C |b|^{m+1} \cdot \|\beta\|^{m+1} \exp((t-s) |b| \cdot \|\beta\|) d\tau_{m+1} \dots d\tau_2 d\tau_1 \leq \\ \leq C |b|^{m+1} \cdot \|\beta\|^{m+1} \exp((t-s) |b| \cdot \|\beta\|) \frac{(t-s)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

То есть  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\bar{R}_m\| = 0$ . Теорема доказана.

**2. Численные результаты.** В качестве примера рассмотрим вычисление интеграла

$$I(t) = \int \exp \left( \int_s^t f(\tau) dx(\tau) \right) d\mu(x). \quad (8)$$

Для этого интеграла при некоторых функциях  $f$  можно получить точное значение, так как интеграл  $I(t)$  равен  $\bar{T} \exp \left( \int_s^t (-a\alpha f(\tau) + b\beta) d\tau \right)$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dI(t)}{dt} = (-a\alpha f(\tau) + b\beta) I(t), \quad I(s) = E. \quad (9)$$

При  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $f(\tau) = -\frac{1}{a\tau}$  решение уравнения (9) имеет вид

$$I_{11}(t) = \frac{bs+1}{2bs} \exp\{b(t-s)\} + \frac{bs-1}{2bs} \exp\{-b(t-s)\}, \\ I_{21}(t) = \frac{b^2 st + b(t-s) - 1}{2b^2 st} \exp\{b(t-s)\} + \frac{-b^2 st + b(t-s) + 1}{2b^2 st} \exp\{-b(t-s)\}, \\ I_{12}(t) = \frac{1}{2} \exp\{b(t-s)\} - \frac{1}{2} \exp\{-b(t-s)\}, \\ I_{22}(t) = \frac{bt-1}{2bt} \exp\{b(t-s)\} + \frac{bt+1}{2bt} \exp\{-b(t-s)\}.$$

Рассмотрим приближенное вычисление интеграла (8) с помощью формулы (4). При  $m=2$  получим

$$I(t) \approx \exp \left( -a\alpha \int_s^t f(\tau) d\tau \right) + \int_s^t \exp \left( -a\alpha \left( \int_s^{\tau_1} (-1)f(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t f(\tau) d\tau \right) \right) d\tau_1 b\beta + \\ + \int_s^t \int_s^{\tau_1} \exp \left( -a\alpha \left( \int_s^{\tau_2} f(\tau) d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_1} (-1)f(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t f(\tau) d\tau \right) \right) d\tau_2 d\tau_1 (b\beta)^2.$$

При  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $f(\tau) = -\frac{1}{a\tau}$  получаем:

$$I(t) \approx \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{t}{s}\right)\right) + \int_s^t \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{st}{\tau_1^2}\right)\right) d\tau_1 b\beta + \int_s^t \int_s^{\tau_1} \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{t\tau_2^2}{s\tau_1^2}\right)\right) d\tau_2 d\tau_1 (b\beta)^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{t}{s} & 0 \\ 0 & \frac{s}{t} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & t-s \\ \frac{t^2}{3s} - \frac{s^2}{3t} & 0 \end{pmatrix} + b^2 \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6s} - \frac{ts}{2} + \frac{s^2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{t^2}{3} + \frac{s^3}{6t} - \frac{st}{2} \end{pmatrix}.$$

При  $s=1$ ,  $t=2$ ,  $b=0,1$  приближенное значение интеграла  $I(t)$  равно  $\begin{pmatrix} 2,00666 & 0,1 \\ 0,11666 & 0,50416 \end{pmatrix}$ , точное значение равно  $\begin{pmatrix} 2,00670 & 0,10017 \\ 0,11667 & 0,50415 \end{pmatrix}$ .

### Список использованной литературы

1. Далецкий, Ю. Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями / Ю. Л. Далецкий // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17, № 5 (107). – С. 3–115.
2. Далецкий, Ю. Л. Обобщенные меры в функциональных пространствах / Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – Т. 10, № 2. – С. 329–343.
3. Давыдов, А. С. Квантовая механика / А. С. Давыдов. – М.: Наука, 1973.
4. Шифф, Л. Квантовая механика / Л. Шифф; пер. с англ. Г. А. Зайцева. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Ichinose, T. Propagation of a Dirac particle. A path integral approach / T. Ichinose, H. Tamura // J. Math. Phys. – 1984. – Vol. 25 (6). – P. 1810–1819.
6. Ichinose, T. The zitterbewegung of a Dirac particle in two-dimensional space-time / T. Ichinose, H. Tamura // J. Math. Phys. – 1988. – Vol. 29 (1). – P. 103–109.
7. Малютин, В. Б. О вычислении некоторых матричнозначных функциональных интегралов / В. Б. Малютин // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 1. – С. 92–103.
8. Малютин, В. Б. Вычисление функциональных интегралов, порожденных уравнением Дирака со скалярными и векторными потенциалами специального вида / В. Б. Малютин // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2013. – № 3. – С. 13–16.
9. Малютин, В. Б. О приближенном вычислении континуальных интегралов по мере, порожденной системой дифференциальных уравнений параболического типа / В. Б. Малютин // Докл. Акад. наук Беларуси. – 1991. – Т. 35, № 3. – С. 202–208.
10. Малютин, В. Б. О вычислении континуальных интегралов по матричнозначной мере / В. Б. Малютин // Вес. Акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1993. – № 1. – С. 8–14.
11. Малютин, В. Б. Аппроксимации континуальных интегралов по мере, порожденной системой дифференциальных уравнений // Вес. Акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1992. – № 5/6. – С. 7–13.
12. Егоров, А. Д. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов / А. Д. Егоров, П. И. Соболевский, Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1985.
13. Egorov, A. D. Functional integrals: Approximate evaluation and Applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
14. Егоров, А. Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006.
15. Malyutin, V. On approximation of matrix valued functional integrals / V. Malyutin // Monte Carlo methods and applications. – 2007. – Vol. 13, N 4. – P. 287–298.
16. Айрян, Э. А. Вычисление матричнозначных функциональных интегралов с помощью функциональных многочленов / Э. А. Айрян, В. Б. Малютин // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2014. – № 1. – С. 18–25.
17. Auryan, E. A. Application of functional polynomials to approximation of matrix-valued functional integrals / E. A. Auryan, V. B. Malyutin // Bull. of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Mathematics. Informatics. Physics. – 2014. – N 1. – P. 55–58.
18. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 3.
19. Боголюбов, Н. Н. Введение в теорию квантованных полей / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. – М., 1976.
20. Карасев, М. В. Бесконечные произведения и Т-произведения экспонент / М. В. Карасев, М. В. Мосолова // Теор. и мат. физика. – 1976. – Т. 28, вып. 2. – С. 189–200.
21. Назайкинский, В. Методы некоммутативного анализа: авт. пер. с англ. / В. Назайкинский, Б. Стернин, В. Шаталов. – М.: Техносфера, 2002.

Поступила в редакцию 15.10.2015